جلسه چهارم:

فرض کنید در دریا سوار بر کشتی هستید و آن‌قدر از ساحل دور می‌شوید که در اطرافتان چیزی جز آب مشاهده نمی‌کنید. اگر کسی از شما بپرسد کجا هستید، چه پاسخ می‌دهید؟ تا وقتی که ساحل را می‌دیدید پاسخ به این سوال کار آسانی بوده و می‌گفتید نسبت به ساحل در فلان جا هستید. ولی وقتی هیچ نقطه‌ی شاخصی در وسط دریا پیدا نمی‌کنید چگونه می‌توانید جایتان را برای کسی مشخص کنید؟! دلیل نداشتن پاسخی برای این سوال این است که جا نسبی است. به عنوان مثالی دیگر فرض کنید می‌خواهید آدرس جای مشخصی را به کسی بدهید. این آدرس‌دهی را از کجا شروع خواهید کرد؟ مسلماً از جایی آدرس می‌دهید که هم برای شما و هم برای آن فرد کاملاً آشنا و معین باشد. این نکته که جا نسبی است، اگرچه کوچک به نظر می‌آید اما لازمه‌ی بسیاری از کارهایی که در ادامه در هر موضوعی که به جا و جابجایی مرتبط است انجام می‌دهید می‌باشد. بنابراین داشتن درک درستی از این موضوع بسیار مهم است.

پس آموختیم که:

- جا نسبی است و برای معین نمودن جای چیزی باید چیز دیگری حتماً وجود داشته باشد.
- جا و جابجایی مربوط به چیزهاست و از خودش چیزی نیست. تا چیزی نباشد جا مفهومی نداشته و در حقیقت جا فرقی است که بین چیزهاست.
- اگرچه جای اول مهم است ولی وقتی از این جای اول دور می شود جابجایی مهم می‌شود.
- باید به تعریف و تفاوت جای نسبی[۱] و جابجایی[۲] دقت داشته باشیم.

جای نسبی به جای آغازین و چگونگی جابجایی بستگی دارد و با این دو مشخص می‌شود. در ادامه آن‌چه که به دنبال مدل ریاضی کردن (یا مهندسی کردن یا عددی کردن(پیمانه درست کردن و با شمردن پیمانه‌ها به قدر و اندازه‌ی آن رسیدن)) آن هستیم **موضوع جابجایی**است. ما تا پایان این ترم راجع به موضوع جابجایی و دیگر موضوعاتی که به آن مرتبط‌اند خواهیم پرداخت.

اگر بخواهیم جابجایی روی زمین به سمت شمال را بیان نماییم تنها با گفتن یک عدد این جابجایی را مشخص می‌کنیم. ولی اگر جابجایی در جهات دیگر روی سطح زمین انجام شود دیگر با گفتن یک عدد در راستای شمال نمی‌توان جابجایی را مشخص نمود. حال این سوال مطرح می‌شود که برای بیان جابجایی روی سطح زمین به

[۱] Position

[۲] Displacement

چند جابجایی مستقیم نیازمندیم یا به عبارت دیگر چند جابجایی مستقیم لازم است تا بر حسب آن‌ها هر جابجایی روی زمین را بتوانیم آدرس دهی کنیم؟ البته در پاسخ به این سوال توجه داریم که منظورمان جابجایی روی رویه‌ی زمین است و هیچ ارتفاعی از سطح زمین نمی‌گیریم.

پاسخ این است که دو جابجایی مستقیم فرضاً شمال و شرق یا جنوب و غرب برای آدرس‌دهی تمام جابجایی‌های روی زمین کفایت می‌کند. یا به بیان دیگر حداقل دو جابجایی مستقیم لازم است که با کنار هم گذاشتن ضریبی از آن‌ها هر جابجایی دیگری را بتوانیم بیان کنیم. همچنین اگر از سطح زمین ارتفاع بگیریم علاوه بر این دو، یک جابجایی مستقیم دیگری نیز مورد نیاز است. لازم به ذکر است که همواره سعی‌مان بر این است که هر چه امکان دارد تعداد جابجایی‌هایِ مبنا، کم باشد. اگر نتوانستیم تمام جابجایی‌های ممکن را با جابجایی‌های مستقیم بیان نماییم به این معنی است که جابجایی مستقیم دیگری مورد نیاز است.

به موضوع مورد بحث که در این‌جا جابجایی می‌باشد اصطلاحاً فضا می‌گویند. وقتی تنها دو عضو از این فضا برای ساختن بقیه‌ی جابجایی‌ها کفایت می‌کند اصطلاحاً می‌گویند این فضا دوبعدی است یا تعداد پایه‌های این فضا دو است. بنابراین تعداد پایه‌های فضا را بُعد آن فضا می‌گویند. موضوعِ مطرح را فضا می‌نامند و هر مصداقِ آن موضوع را بردار و روی هم فضای برداری و دسته بردارهایی که بتوان همهٔ بردارهای دیگر را بر حسب آنها بیان نمود را پایه‌های آن فضای برداری و به تعداد اعضای این دسته بُعد آن فضای برداری گویند.

بنابراین آموختیم که برای مدل‌سازی ریاضیِ جابجایی به شکل فضای ریاضی:

- باید موضوع یا فضای مربوطه مشخص و تعریف شده باشد. در این‌جا موضوع مطرح جابجایی است.
- باید ترکیب هر جابجایی با جابجایی دیگرتعریف شود که ما برای این کار جابجایی دوم را به دنبال جابجایی اول انجام دادیم. در فضای برداری اصطلاحاً به این کار جمع دو بردار می‌گویند.
- باید بررسی کنیم آیا جمع هر دو بردار آن خاصیت تعویض پذیری دارد. منظورمان از جمع دو بردار، جمع کردن ضریبی از یک بردار با ضریبی از بردار دیگر است و همانطور که می‌دانیم در ریاضیات ضرب از جمع بدست آمده و اصالت با جمع کردن است.

به این ترتیب مشخص شد که فضای برداری، فضایی است که مفاهیم فوق در آن مشخص باشند.

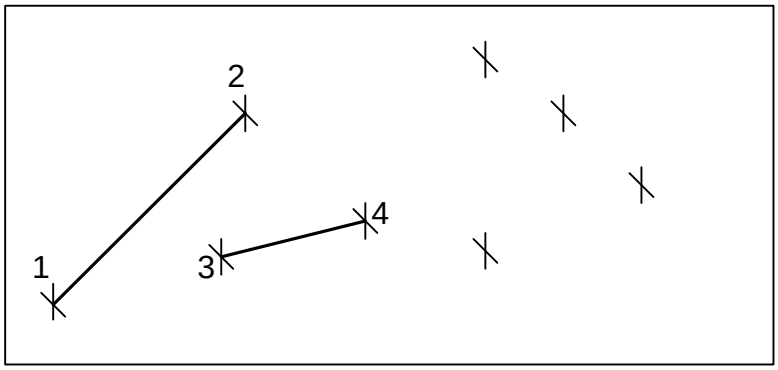
حال به مثال دیگری برای فضای برداری می‌پردازیم. اگر فضای رنگ‌ها را در نظر بگیریم، این فضا چندبعدی است؟ ابتدا باید فضای رنگ را به درستی تعریف و مشخص کنیم. مثلاً می‌گوییم منظور از ترکیب رنگ‌ها این

است که چند پیاله از یک رنگ را با چند پیاله از رنگ دیگر در ظرفی تمیز وبدون رنگ ترکیب نموده و به خوبی آن را هم بزنیم. تعداد رنگ‌هایی که لازم است تا کل فضای رنگ را بسازیم یا همان بعد فضای رنگ چند است؟ در پاسخ خواهید گفت با سه رنگ، تمامی رنگ‌ها حاصل می‌شوند. بنابراین فضای رنگ یک فضای سه بعدی است.

در یک فضا وقتی برداری با ضریبی از بردار دیگر ساخته می‌شود می‌گویند این بردار با آن خطی است یا ضریب یا تناسبی از آن است. وقتی ضریبی از یک بردار را با ضریبی از بردار دیگر جمع می‌کنیم اصطلاحاً می‌گوییم آن دو را ترکیب خطی نمودیم. اگر نتوانیم برداری را به صورت ترکیب خطی بردارهای دیگر بیان کنیم می‌گوییم این بردار مستقل خطی از آن بردارهاست. به عنوان مثال ارتفاع گرفتن از سطح زمین مستقل از حرکت به سمت شمال و شرق است؛ چرا که نمی‌توان جابجایی در راستای ارتفاع را با جابجایی به سمت شمال و شرق بیان نمود.

حال می‌توانیم هر جابجایی حول و حوش زمین را به صورت سه عدد بیان نماییم.این سه‌تایی را بیان این بردار در پایه‌ی مشخص‌شده می‌نامیم. آن‌چه که مسلم است این است که در صورتی که پایه‌های یک فضای برداری تغییر کند بیان یک بردار مشخص در این فضا نیز تغییر خواهد کرد. اصطلاحاً در فضایِ جابجایی، به این پایه‌ها دستگاه مختصات می‌گوییم.

در ادامه فرض کنید برای بیان کلیه‌ی جاهای روی تخته می‌خواهیم پایه‌هایی تعریف کنیم. مسلماً دو پایه باید تعریف کنیم. این دو پایه را به صورت زیر اختیار می‌کنیم.



حال سوالی که مطرح می‌شود این است که آیا ایرادی بر انتخاب این دو بردار به عنوان پایه‌های دستگاه مختصات تخته برای بیان کلیه‌ی جابجایی‌های روی تخته وارد است یا خیر؟

ممکن است کسی در پاسخ بگوید اندازه‌ی این بردارها یکه نیست ولی باید در پاسخ گفت که ما در تعریف پایه‌های دستگاه برای اندازه‌ی بردارهای پایه محدودیت یکه بودن قرار ندادیم و مهم این است که بتوانیم کلیه‌ی جابجایی‌های روی تخته‌ی کلاس را با این دو بردار بیان نماییم. ممکن است شخص دیگری بگوید باید مبدأی برای این دستگاه مختصات درست کنیم. لابد منظور از مبدأ این است که بردارهای پایه طوری انتخاب شوند که تلاقی داشته و محل تلاقی‌شان همان مبدأ است. در پاسخ باید گفت که باز هم به این نکته توجه نشده است که ما هدفمان از تعریف پایه‌های دستگاه مختصات تخته، تعریف حداقل بردارهای لازم برای بیان کلیه‌ی جابجایی‌ها بود نه بیان جاها یا نقاط روی تخته. بله، اگر بخواهیم کلیه‌ی نقاط یا جاهای روی تخته را در دستگاهی بیان نماییم از آن‌جایی که جا نسبی است باید علاوه بر دو بردار پایه، یک جایی را به عنوان نقطه‌ی مرجع انتخاب نماییم. باز هم باید توجه کنیم که هیچ محدودیتی در انتخاب این نقطه نداریم و نباید حتما نقطه‌ی مشترکی از دو پایه انتخاب شود و کلیه‌ی نقاط روی تخته می‌توانند به عنوان نقطه‌ی مرجع و همه‌ی جفت بردارهای مستقل می‌توانند به عنوان بردارهای پایه برای بیان کلیه‌ی جاها و جابجایی‌ها استفاده شوند.

در پایان می‌توان نتیجه گرفت که برای بیان همه‌ی جابجایی‌ها در فضای سه‌بعدی، تعریف سه بردار با هر اندازه‌ی دلخواهی که با هم مستقل خطی باشند کفایت می‌کند و برای بیان همه‌ی جاها در فضای سه بعدی علاوه بر سه بردار پایه باید نقطه‌ای دلخواه را به عنوان مرجع مشخص نماییم و هیچ محدودیتی در انتخاب این نقطه‌ی مرجع نداریم.

لازم به ذکر است تمرین‌هایی برای این مبحث روی سایت درس قرار خواهد گرفت که تدبر در آن‌ها و انجامشان برای درک بهتر مبحث و مشاهده‌ی کاربرد آن در عمل توصیه می‌گردد و با الهام از آیه‌ی قرآن هر که دنبال انجام این تمرین‌ها برود فلنفسه و هر که غفلت کند فعلیها.